OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1916. N° 3.

OM DEN RETTE LINIES BESTEMMELSE VED TO PUNKTER.

AF

J. HJELMSLEV.

(VED FORELÆGGELSEN AF EN NY LÆREBOG I ELEMENTÆR GEOMETRI I MØDET D. 10. MARTS 1916.)

Den lille Bog, jeg i Aften skal have den Ære at forelægge, afviger i saa mange Henseender fra andre eksisterende Lærebøger i Geometri, at den maa siges at betegne et radikalt Brud med alt overleveret. Pædagogiske Betragtninger skal jeg dog ikke ved denne Lejlighed komme ind paa. Bogen er bestemt til Skolebrug, men under den jævne Fremstillingsform skjuler sig et nyt Fremskridt med Hensyn til den videnskabelige Behandling af Geometriens Principper, og det er det, som jeg har tænkt mig her med nogle faa Ord at gøre Rede for.

Alle Undersøgelser over Geometriens Principper har deres Udspring fra det System af Forudsætninger, som indeholdes i Euklids Elementer, hvad enten de nu dér allerede fandtes eksplicite og nøjagtig formulerede, eller de kun forefandtes i implicite Former og først senere blev nøjagtig formuleret. Lad os betegne disse Forudsætninger med A, B, C, D, E (Antallet er i denne Forbindelse uden Betydning). Det har altid været et Hovedspørgsmaal at faa Forudsætningerne reduceret saa meget som muligt. Først og fremmest har man naturligvis søgt at skaffe Klarhed over, om enkelte af dem ligefrem kunde udledes af de øvrige, saaledes at man helt kunde udelade dem. Men det kunde jo ogsaa tænkes, at en af Forudsætningerne, E f. Eks., vel ikke ligefrem kunde udledes af de øvrige, A, B, C, D, men at man alligevel kunde gøre fuldstændig Rede for disse sidstes logiske Rækkevidde, saaledes at man f. Eks. var i Stand til at paavise, at man ud fra A, B, C og D maatte føres enten til E eller til en af flere med denne sideordnede Muligheder E_1, E_2, ..., som imidlertid alle kunde opregnes. Og i saa Tilfælde maatte man jo ogsaa sige, at E's Rolle som uafhængig Forudsætning i Virkeligheden var udspillet. Dette Forhold gjorde sig f. Eks. gældende overfor Parallelaksiomet, og lignende Resultater har man i den nyere Tid fundet mange af. Der er paa denne Maade opstaaet flere sideordnede geometriske Systemer $ABCDE$, $ABCDE_1$, $ABCDE_2$, o. s. v.

Da man endnu i vore Dage fra enkelte Sider ser den mærkelige Antagelse gjort gældende, at en saadan Deling i forskellige Systemer er et Udtryk for, at Matematikerne er uenige om, hvilket af disse Systemer der nu er det »rigtige«, skal jeg blot her med et Par Ord berøre de nævnte Undersøgelsers Betydning. Og det skal da først og fremmest siges, at der med disse Undersøgelser i Almindelighed slet ikke tænkes paa Løsning af erkendelsesteoretiske Spørgsmaal. Hvert af Systemerne maa opfattes som en omfattende Formel, der lader sig anvende paa alle saadanne Omraader, hvor Forudsætningerne er tilfredsstillede. Saadanne Omraader finder man indenfor selve Matematikken, idet man ofte dér vil kunne behandle store Grupper af Undersøgelser paa een Gang ved Hjælp af saadanne særlige geometriske Systemer. Og hvert System har jo i hvert Fald altid den rent videnskabelige Betydning at være et Led i en Redegørelse for den logiske Sammenhæng mellem Geometriens Principper.

Paa den 2den skandinaviske Matematikerkongres i København 1911 meddelte jeg, at jeg var naaet frem til saadanne Reduktioner i Geometriens Principper, at det nu var muligt at nøjes med Kongruensforudsætninger i Planen alene foruden een eneste af de grafiske (projektive) Forudsætninger. Denne ene Forudsætning var den, som hos Euklid og i alle senere Systemer var sat i Spidsen for det hele. Det var Forudsætningen om den rette Linies eentydige Bestemmelse ved 2 Punkter. Jeg standsede et Øjeblik ved det Spørgsmaal, om man kunde tænke sig en Reduktion ogsaa af denne Forudsætning, og det er herom min Meddelelse i Aften i Hovedsagen skal dreje sig. Jeg skal da straks sige, at det har vist sig, at man kan reducere den; man kan nemlig nøjes med den mindre omfattende Forudsætning, at der eksisterer mindst een ret Linie, som gaar gennem 2 vilkaarlig givne Punkter, hvorimod det meget godt kan tillades, at der er flere Linier, der opfylder Betingelsen. Naar blot man har Kongruensforudsætningerne, vil den metriske Geometri ikke berøres deraf. Den projektive Geometri vil naturligvis faa et lidt andet Udseende, men lader sig lige saa let gennemføre i denne modificerede Form som i den tidligere Form. Som Eksempel skal vi nævne Pascal's Sætning. Denne lyder i den sædvanlige Skikkelse saaledes: Naar en Sekskant er indskrevet i en Cirkel, vil Skæringspunkterne mellem modstaaende Sider være beliggende paa een og samme rette Linie. I den nye modificerede Form vil den derimod lyde saaledes: Naar en Sekskant er indskrevet i en Cirkel, vil der altid eksistere en ret Linie, som indeholder et fælles Punkt for hvert af de 3 Par modstaaende Sider. Det vil af dette Eksempel let forstaas, hvad det er for Ændringer, der foregaar i de projektive Sætninger. Og det er klart, at den nye Geometri omfatter den gamle som et specielt Tilfælde.

For nærmere at oplyse Sagen skal vi anføre et bestemt Eksempel paa den nye Form for Geometri, som her bliver Tale om.

Vi betragter et System af komplekse Tal af Formen $a + \varepsilon b$, hvor a og b er sædvanlige reelle Tal, medens ε skal behandles som en Bogstavfaktor, hvis Kvadrat sættes $= 0$. Med saadanne Tal (de duale Tal) kan man regne; man kan addere, subtrahere, multiplicere og i Almindelighed ogsaa dividere, naar blot Divisor ikke er et ε-Tal, d. e. et Tal af Formen εb. I sidste Tilfælde kan Divisionen slet ikke udføres, med mindre Dividenden er af Formen εc (specielt $= 0$), og naar det sidste sker, er Divisionen ubestemt, idet (naar $b \neq 0$)

$$\frac{\varepsilon c}{\varepsilon b} = \frac{c}{b} + \varepsilon k,$$

hvor k er et vilkaarligt reelt Tal.

Vi definerer nu en Geometri saaledes:

1) Ved et **Punkt** forstaas et hvilket som helst Talpar af Formen $(x_1 + \varepsilon x_2,\ y_1 + \varepsilon y_2)$.

2) Ved en **ret Linie** forstaas Samlingen af Punkter $(x,\ y)$, der tilfredsstiller en Ligning af Formen:

$$Ax + By + C = 0,$$

hvor A, B og C er duale Tal, idet A og B ikke begge er ε-Tal.

To forskellige Linier $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, kaldes parallele, naar $AB_1 = A_1B$, og vinkelrette paa hinanden, naar $AA_1 + BB_1 = 0$. To parallele Linier har intet Skæringspunkt. To paa hinanden vinkelrette Linier har eet og kun eet Skæringspunkt. Men i andre Tilfælde kan Linierne have mere end eet Punkt fælles. Saaledes har Linierne

$$y = 0,\ y = \varepsilon x,$$

uendelig mange Punkter fælles, nemlig alle Punkter $(\varepsilon k,\ 0)$, hvor k er et vilkaarligt reelt Tal.

3) En Flytning defineres ved følgende Transformationsligninger mellem Punktet (x, y) og det korresponderende Punkt (x_1, y_1):

$$x = \alpha x_1 + \beta y_1 + \xi,$$
$$y = \beta x_1 - \alpha y_1 + \eta,$$

hvor α, β, ξ, η er duale Tal, og $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Det vil indenfor denne Geometri ved simpel Regning være let at paavise, at Ligedannethedslæren, den pythagoræiske Læresætning, Trigonometrien, altsaa hele den beregnende Geometri gælder uden nogen Indskrænkning. Ikke desto mindre falder den Grundsætning, som altid har været sat i Spidsen for Geometrien, Sætningen om den rette Linies eentydige Bestemmelse ved 2 Punkter.

Ganske uafhængig af denne Grundsætning bestaar altsaa her hele den beregnende Geometri, den Geometri, som handler om Udmaaling, om Bestemmelse af nogle Maal i en Figur ved Hjælp af nogle andre.

Vi har nu set et, som man maaske vil finde, meget abstrakt Eksempel paa den nye Geometri, som vi her er kommet ind paa. Men det interessanteste ved hele Sagen er den, at et Eksempel paa en saadan Geometri ligger os meget nærmere, end man tror. Selve den praktiske Geometri, saaledes som den f. Eks. foreligger i Tegneplanen, hvor det er virkelige tegnede Figurer, som er Emnet for vore Undersøgelser; denne praktiske Geometri er nemlig intet mindre end et haandgribeligt Eksempel paa en saadan »ny« Geometri. Thi her gælder det jo netop, at to rette Linier under visse Omstændigheder kan have et helt Stykke, altsaa flere Punkter, fælles. Og herigennem faar vore Undersøgelser nu ogsaa en væsentlig erkendelsesteoretisk Betydning, idet der aabner sig Muligheder for at naa frem til en virkelig Forstaaelse af den praktiske Geometri. Den eneste Hindring, der har været for at faa umiddelbar Tilslutning mellem den teoretiske og den praktiske Geometri, har nemlig netop ligget i den teoretiske Geometris Forudsætning om den rette Linies eentydige Bestemmelse ved to Punkter, og denne Hindring er nu ryddet af Vejen, idet vi har vist, at nævnte Forudsætning er en ganske uvæsentlig Forudsætning. Der kan derfor nu være Tale om uden Abstraktioner at give en eksakt gennemført Behandling af det virkelige Rums Love. Og det er en saadan Behandling, jeg har taget fat paa, og hvis første Resultater er nedlagt i den lille Lærebog, jeg her forelægger.

Det første, man maa forlange, naar Talen er om at grundlægge en eksakt Virkelighedsgeometri, f. Eks. i Tegneplanen, maa være det, at de Grundsætninger, man stiller op, er absolut paalidelige i praktisk Forstand. Og hvad vil det nu sige? Det vil for det første sige, at det ved Forsøg og Iagttagelser skal være muligt at prøve Grundsætningernes Rigtighed, og dernæst, at det ikke inden for et foreliggende Realisationsomraade skal være muligt at paavise væsentlige Afvigelser fra de opstillede Grundsætninger. Ingen af disse Fordringer var opfyldt af det euklidiske System. For det første var det f. Eks. umuligt direkte at prøve en Forudsætning som den, der var udtrykt i det 5. Postulat (Parallelaksiomet), og for det andet var det f. Eks. let at fremstille 2 forskellige rette Linier, som havde mere end eet Punkt fælles. I det System, jeg forelægger her, er alle de Linier, Planer, rette Vinkler, der er Tale om, definerede ved tekniske Fremstillingsmetoder, der i sig rummer en absolut Kontrol for Rigtigheden af de Forudsætninger, man opstiller. Og de Forudsætninger, der her bliver Tale om, kan saa at sige sammenfattes i een eneste, Eksistensen af den retvinklede Klods (Normalklodsen). Heri indbefattes for Planens Vedkommende Rektanglets Eksistens.

Herpaa bygges nu Læren om parallele Linier. Grundsætningen om den rette Linies Bestemmelse ved to Punkter optages kun i den Form, hvori den virkelig gælder: et Liniestykke er eentydig bestemt ved sine Endepunkter, medens der udtrykkelig gøres opmærksom paa, at to rette Linier kan have et sammenhængende Liniestykke fælles. Men denne Omstændighed medfører ikke nogen som helst Indskrænkning i Nøjagtigheden. Hovedsætningen om, at en Række ækvidistante Paralleler, hvoraf de to yderste gaar gennem Endepunkterne A og B af et Liniestykke AB, deler AB i lige store Dele, bestaar ganske uafhængig af, om Skæringen er daarlig eller ikke. Sætningen betyder nemlig kun, at de Punkter, der deler AB i det paagældende Antal lige store Dele, ligger paa Parallelerne, og dette kan i alle Tilfælde paavises ved en Parallelforskydning langs AB. I Bogen fastholdes i Almindelighed den Vedtægt, at »to rette Liniers Skæringspunkt« skal forstaas som »et Punkt (specielt et af de Punkter), som ligger paa begge Linier«.

Fra Sætningen om de ækvidistante Paralleler kommer man nu let videre til Ligedannethedsteorien og den beregnende Geometri, og over den analytiske Geometri kan man derefter naa frem til alle geometriske Hjælpemidler.

I nær Forbindelse med Spørgsmaalet om den rette Linies eentydige Bestemmelse ved to Punkter, eller om den eentydige Bestemmelse af to Liniers Skæringspunkt, staar — foruden naturligvis hele det projektive Omraade — det almindelige Spørgsmaal om Kurvers Skæring eller Bestemmelse ved et endeligt Antal Punkter. Herhen hører ogsaa Berøringsproblemet, Spørgsmaalet, om Tangenten har et enkelt Punkt eller et helt Stykke fælles med Kurven. Og lige fra Oldtiden op til vore Dage har man sikkert været af den Mening, at de Afvigelser, som umiddelbart her kunde paavises mellem de teoretiske og de praktiske Former indenfor dette Omraade, maatte umuliggøre Opførelsen af en geometrisk Lærebygning paa Erfaringens Grundlag alene. Man har ment, at de umiddelbart iagttagne Egenskaber ikke lod sig indordne i et eksakt logisk System, men at det før eller senere maatte komme til væsentlige logiske Modsigelser imellem dem.

Vi har her vist, at der ingen Modsigelse kan komme. Hele det nævnte Omraade angaaende Skærings- og Røringspunkters Eentydighed er i Virkeligheden uafhængigt af den egentlige Geometri, af Læren om Relationer mellem Afstande og Vinkler. Normalklodsens Eksistens i Forbindelse med den retlinede og den cirkulære Maalestoks fundamentale Egenskaber udgør det fuldstændige Grundlag for trigonometrisk Maaling, og dermed for hele Geometrien; de projektive Egenskaber har derimod en afledet Karakter. Og gennem den analytiske Geometri vil sidstnævnte Egenskabers Betydning træde frem i fuld og klar Belysning. Enhver praktisk Figur, saaledes som den f. Eks. kan foreligge i Tegneplanen, opstaaet ved, at man ud fra et System af opgivne Punkter og Linier ved Tegning har afledet nogle nye Punkter og Linier, lader sig analytisk fiksere saaledes, at de givne Punkter og Linier faar bestemte analytiske Udtryk (ved Koordinater og Ligninger) og alle de afledede Punkter og Linier ligesaa, og saaledes at efter denne Fiksering alle den sædvanlige teoretiske Geometris (ogsaa den projektive Geometris) Sætninger er gældende.

Det at konstruere en Figur nøjagtig er altid ensbetydende med en saadan Fiksering, hvad enten den nu gennemføres direkte ved et Koordinatnet eller mere indirekte gennem Kontrolprøver ved den teoretiske Geometris Sætninger. At konstruere nøjagtig er saaledes ikke noget, som kan udføres alene ved Omhu med Hensyn til Tegningens Udførelse. Omhu er ikke tilstrækkelig, naar det f. Eks. gælder at tage et Skæringspunkt mellem 2 Linier, der er afledet af opgivne Punkter eller Linier, og som danner en meget lille Vinkel med hinanden. Her maa Kontrolprøver, altsaa netop analytisk Fiksering, til. Et Skridt hen imod en saadan Fiksering er den simple praktiske Forholdsregel, at man f. Eks. for to Linier, der har et Stykke fælles, fikserer et Skæringspunkt midt i dette Stykke, men i Regelen maa Fikseringen foregaa gennem Iagttagelse af mange andre Forholdsregler, idet man maa anvende saa mange af den metriske Geometris Sætninger som muligt.

I Henhold til det foregaaende kan man sige, at det videnskabelige Resultat, der skjuler sig i min lille Lærebog, er det, at Geometrien er bleven frigjort for Nødvendigheden af den Forudsætning, at der ikke eksisterer mere end een ret Linie, som gaar gennem to givne Punkter. Det almindelige Forhold mellem den projektive og den metriske Geometri er dermed traadt frem i en helt ny Belysning. Medens CAYLEY i 1859 gennem sine Undersøgelser over Maalgeometrien kunde fastslaa, at Projektivgeometrien omfattede alle de forskellige Former for metrisk Geometri (baade den euklidiske og de to ikke-euklidiske Geometrier), er vi nu her omvendt naaet frem til en Form for den metriske Geometri, som omfatter ikke blot den gamle Projektivgeometri, men som rummer langt almindeligere Former for Projektivgeometri, nemlig saadanne Former, hvor den rette Linies Bestemmelse ved 2 Punkter, eller Punktets Bestemmelse ved 2 Linier, ikke længere er eentydig.